LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Simulação e Otimização

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

- Mestrado
  - QUESTÕES?

SIMO/MQDEE

- Seminário de Ética !

ISEG - MISSÃO

- a Criação,
- Transmissão e
- Valorização Social e Económica

do conhecimento e da cultura

nos domínios das ciências económicas, financeiras e empresariais

num quadro de pluralidade e de garantia de liberdade intelectual e científica, de respeito pela ética e de responsabilidade social

ISEG - VALORES

- Diversidade e pluralidade
- Garantia de liberdade intelectual e científica
- Respeito pela ética e responsabilidade social
- Avaliação interna e externa e melhoria contínua

ISEG – VISÃO

- Afirma-se como uma das melhores escolas de economia e gestão em Portugal
- Com elevada reputação internacional
- Reconhecido
  - pela qualidade dos seus graduados, pela
  - pela investigação realizada
  - pelo impacto das suas atividades na comunidade envolvente

- **Aulas**

  Grupos – trabalhos!

- **Avaliação** SIMO/MQDEE

  - **AC - Trabalhos & Aula – 65%**
  - **Teste escrito – 35%**
    - **Consulta – 1 folha A4**

Programa

Cap. 1 – Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Relaxações

Resolução exata de problemas

Algoritmo de *branch-and-bound*

Algoritmo de planos de corte

Utilização de software

Cap. 2 – Problemas de Otimização Combinatória - Roteamento

Problemas de roteamento nos nodos

Problemas de roteamento nos arcos

Utilização de Software

Cap. 3 – Modelos de Investigação Operacional em Simulação

Simulação e otimização

Geração de instâncias de problemas de otimização

Utilização de software de simulação – SIMUL8

Bibliografia

- **Corberán, Á. & G. Laporte** (2014); *Arc Routing Problems, Methods, and Application*; MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia.
- Drexl, M. (2012); *Rich Vehicle Routing in Theory and Practice*, Logistics Research, Volume 5, pp. 47-63 (DOI: 10.1007/s12159-012-0080-2)
- **Hillier, F.S. & G.J. Lieberman** (2015), *Introduction to Operations Research*, 10th ed., McGraw-Hill, New York.
- Mourão, M.C. & L.S. Pinto (2017); *An updated annotated bibliography on arc routing problems*, Networks, accepted
- **Shalliker, J. & A. Suleman** (2012); *Guia de Simulação Discreta por Computador usando SIMUL8*. Heybrook Associates & ISCTE – IUL Instituto Universitário de Lisboa.
- **Toth, P. & D. Vigo** (2014); *Vehicle Routing Problems, Methods, and Application*; 2nd ed., MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia.
- Wolsey, L. (1998), *Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York.

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Cap. 1 – Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

- 1.1 Introdução
- 1.2 Relaxações
- 1.3 Resolução exata de problemas
  - Algoritmo de *branch-and-bound*
  - Algoritmo de planos de corte
- 1.4 Utilização de software

Bibliografia

- F.S. Hillier; G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, 10th ed., McGraw-Hill, 2015.
- L. Wolsey, Integer Programming, John Wiley & Sons, 1998.

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Hipóteses de PL

Divisibilidade

Aditividade e Proporcionalidade

Certeza

Objetivo Único

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Hipóteses de PL

~~Divisibilidade~~
quantidades discretas → MODELOS DISCRETOS

~~Aditividade e Proporcionalidade~~
descontinuidades
não-linearidades → MODELOS DISCRETOS; PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

~~Certeza~~
estimativas de parâmetros → ANÁLISE DE SENSIBILIDADE (WHAT-IF); PARAMETRIZAÇÃO; PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

~~Objetivo Único~~
múltiplos objetivos → PROGRAMAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Programação Linear Inteira (PLI)

Um **Problema de Programação Linear Inteira (PLI)** é um PL em que todas (**PLI puro**) ou parte (**PLI misto**) das variáveis só podem assumir valores inteiros.

Variáveis inteiras – para representar quantidades indivisíveis

Variáveis binárias – para decisões Sim/Não – **Programação Binária**

Problemas de Otimização Combinatória – a solução ótima é um subconjunto de um conjunto finito.

Problemas que poderiam ser resolvidos por enumeração! Crescimento exponencial!

- **Exemplos**: Afetação ($n!$); Mochila (2^n); Cobertura (2^n); Caixeiro Viajante $(n-1)!$; etc.

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

- **Enumeração** -> só se conseguem resolver **instâncias** de pequenas dimensões!

n	log n	$n^{0.5}$	n^2	2^n	n!
10	3.32	3.16	10^2	1.02×10^3	3.60×10^6
100	6.64	10.00	10^4	1.27×10^{30}	9.33×10^{157}
1000	9.97	31.62	10^6	1.07×10^{301}	4.02×10^{2567}

- Formulações; Minorantes; Majorantes

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Exemplos de Aplicações

- ✓ Análise de investimentos
- ✓ Seleção de projetos
- ✓ Localização de equipamentos (fábricas, hangares, carros de apoio) ou de equipas de emergência e de apoio técnico
- ✓ Distribuição; Rotas; Carregamento
- ✓ Desenho de redes (comunicações)
- ✓ Escalonamento de pessoal, de veículos e de equipamentos

Otimização Inteira

Resolução

Algoritmos Exatos:

branch-and-bound (Land, Doig, 1960) (Little, Murty, Sweeney, Karel, 1963)

planos de corte (Gomory, 1960)

Métodos Não Exatos:

Técnicas de arredondamento

Heurísticas

básicas; construtivas; pesquisa local; metaheurísticas;
inspiração social: pesquisa tabu; *ant colonies*
inspiração física: *simulated annealing*
inspiração biológica: genéticos; redes neuronais

Relaxações; Métodos de Subgradiente

Software:

Excel/Solver & OpenSolver

Visual Basic

CPLEX; LINGO; LINDO

Otimização Inteira

Resolução

- PLI de Minimização: $Z^* = Min\{\mathbf{cx}: \mathbf{x} \in P \cap Y, Y \subseteq \mathbb{Z}^n\}$
  - ✓ Majorantes - Heurísticas
  - ✓ Minorantes !

$$\left.\right\} \underline{Z} \leq Z^* \leq \overline{Z}$$

- Como avaliar a qualidade de uma SA ?
- Minorantes (limites duais)
  - Relaxação
    - ✓ Ideia: substituir um problema difícil de resolver por um mais simples e cujo valor ótimo não exceda Z^*
    - ✓ "Aumentar" a RA; Substituir a FO por outra função que nunca exceda a FO inicial

Otimização Inteira
Relaxações

Def.: Um problema (PR): $z_R = Min\{\, f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P \subseteq \mathbb{R}^n\}$ (PLR)

é uma **Relaxação** de um (PI) de minimização:

$$z = Min\{\, \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n\} \quad \text{(PLI)}$$

se: $P \supseteq X \quad \wedge \quad f(\mathbf{x}) \leq c(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in X$

Teor.: Se (PR) é relaxação de (PI), então: $z_R \leq z$

➢ Como construir relaxações "interessantes" ?

Otimização Inteira
Relaxações

➢ A **relaxação linear** de um PLI é o problema de PL que resulta do PLI por omissão das restrições de integralidade.

➢ Dado um PLI de minimização: $z = \text{Min}\{\, \mathbf{c}\,\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X \cap \mathbb{Z}^n\}$

a Relaxação Linear (PLR) é: $z_{RL} = \text{Min}\{\, \mathbf{c}\,\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}$

✓ É relaxação pois: $X \cap \mathbb{Z}^n \subseteq X$ e a FO não se altera!

✓ Logo: $z_{RL} \leq z$

Teor.:

(i) Se a relaxação PLR é impossível, o problema inicial PLI é impossível;

(ii) Seja $\mathbf{x}^*$ uma SO de PLR. Se $\mathbf{x}^* \in \mathbb{Z}^n$ então, $\mathbf{x}^*$ é SO de PLI.

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

Outras relaxações para problemas conhecidos:

- Árvore geradora mínima (SST) com restrições de capacidade:
- Árvore geradora mínima com restrições de grau:
- Roteamento: Nodos; Arcos; Gerais
  - TSP orientado:
  - TSP não-orientado (simétrico):
  - ARP orientado:
  - ARP não orientado:

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

Outras relaxações para problemas conhecidos:

- Árvore geradora mínima (SST) com restrições de capacidade: SST
- Árvore geradora mínima com restrições de grau: SST
- Roteamento: Nodos; Arcos; Gerais
  - TSP orientado: Afetação
  - TSP não-orientado (simétrico): Árvore-1
  - ARP orientado: PT (Problema de Transportes)
  - ARP não orientado: matching

Otimização Inteira

Exemplo

- Considere-se o (PLI)

$$Z^* = Min\ Z = x_1 - 2x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 & \text{(R1)} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

SOLVER

- Resolver o (PLI)
- Resolver a relaxação linear (PLR)
- Resolver o (PLI) sem uma das restrições funcionais (R1)

Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente - PLR

$$Min\ \ z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \cancel{\in Z_0^+} \geq 0 \end{cases}$$

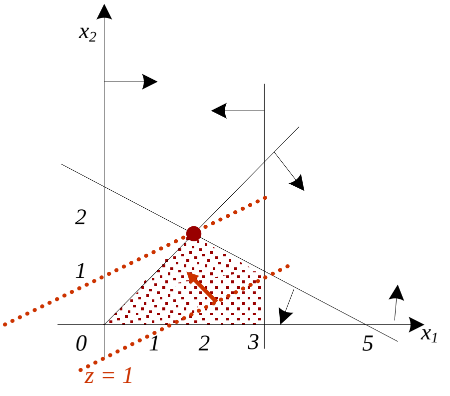
Otimização Inteira

Exemplo

➢ Graficamente - PLR

$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \cancel{\in \mathbf{Z}_0^+} \geq 0 \end{cases}$$



$$\mathbf{x}_{RL} = \left(x_1^{RL} ; x_2^{RL}\right) = \left(\frac{5}{3} ; \frac{5}{3}\right) \qquad z_{RL} = -\frac{5}{3}$$

• SA de PLI: $\mathbf{x} = (0{,}0)$

$$\boxed{z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = z_{(0,0)}}$$

Otimização Inteira

Exemplo

➢ Graficamente - PLI

$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Graficamente - PLI

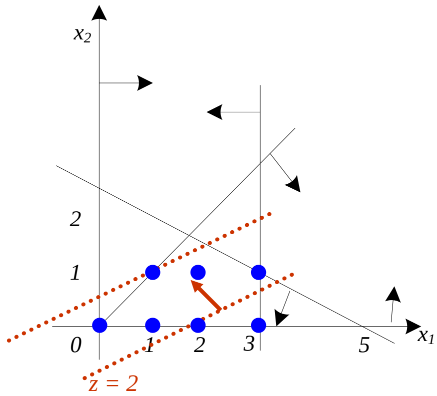
$$Min\ \ z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$\mathbf{x}^* = (1;1)$$

$$z^* = -1$$

$$z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* = -1 \leq 0 = z_{(0,0)}$$



OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Graficamente – PLI sem 1ª restrição

$$Min\ \ z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

Otimização Inteira

Exemplo

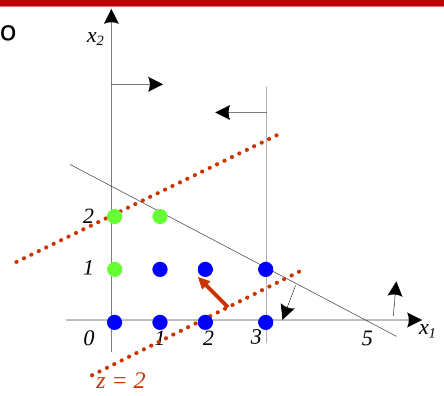
- Graficamente – PLI sem 1ª restrição

$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = (0\,;2)$$

$$\tilde{z} = -4$$



Otimização Inteira

Relaxações

- Dualidade – obtenção de minorantes!
- O valor de qualquer SA dual é um minorante para o valor ótimo do PLI (de minimização)

Teor.: Dualidade Fraca: $w(\mathbf{u}) \leq z(\mathbf{x}),\; \forall \mathbf{x} \in X\,,\; \forall \mathbf{u} \in U$

Teor.: Dualidade Forte:

dado um par de problemas duais, se um tem SO, então o outro também tem e os valores óptimos dos dois problemas coincidem $w^* = z^*$

Otimização Inteira

Exemplo

- Retome-se o PLI

$$\mathit{Min} \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{array}\right\} X \end{cases} \qquad \mathbf{x} \in X$$

- Define-se a função Dual Lagrangeana como sendo:

PLI(**u**): $z(u) = \underset{x \in X}{\mathrm{Min}}\{x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2)\} =$

Otimização Inteira

Exemplo

- Retome-se o PLI

$$\mathit{Min} \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{array}\right\} X \end{cases} \qquad \mathbf{x} \in X$$

- Define-se a função Dual Lagrangeana como sendo:

PLI(**u**): $z(u) = \underset{x \in X}{\mathrm{Min}}\{x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2)\} =$

$$= \underset{x \in X}{\mathrm{Min}}\{x_1(1 - u) + x_2(-2 + u)\}$$

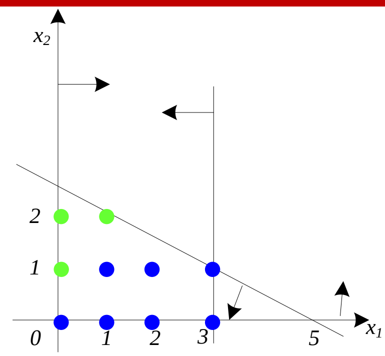
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente

$$\min_{x \in X} \{x_1(1-u) + x_2(-2+u)\}$$

$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \qquad\quad \leq 3 \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$



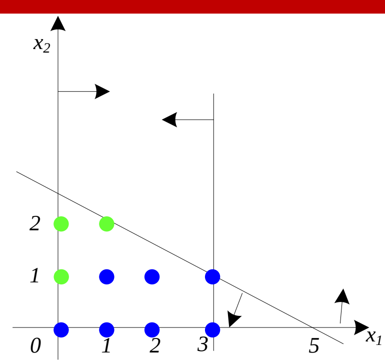
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente

$$\min_{x \in X} \{x_1(1-u) + x_2(-2+u)\}$$

$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \qquad\quad \leq 3 \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$



$u \leq 1 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}} = (0,2)$

$u \geq 2 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3,0)$

$1 \leq u \leq 2 \quad \ldots$

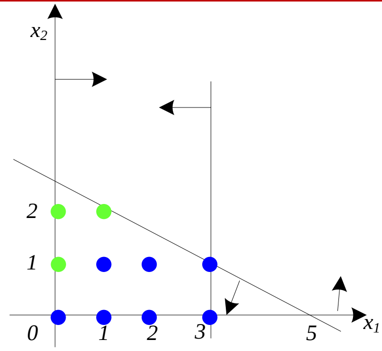
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente

$$\underset{x \in X}{\text{Min}}\{x_1(1-u)+x_2(-2+u)\}$$

$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \qquad\quad \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$



$u \leq 1 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}} = (0{,}2)$

$u \geq 2 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3{,}0)$

$1 \leq u \leq 2 \quad \ldots$

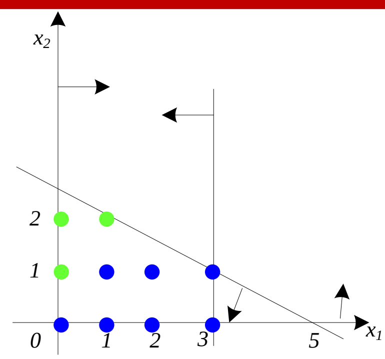
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente

$$\underset{x \in X}{\text{Min}}\{x_1(1-u)+x_2(-2+u)\}$$

$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \qquad\quad \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$



$u \leq 1 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}} = (0{,}2)$

$$\begin{aligned} z(u) &= x_1(1-u)+x_2(-2+u) = \\ &= 0(1-u)+2(-2+u) = \\ &= 2u-4 \end{aligned}$$

$u \geq 2 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3{,}0)$

$$\begin{aligned} z(u) &= x_1(1-u)+x_2(-2+u) = \\ &= 3(1-u)+0(-2+u) = \\ &= 3-3u \end{aligned}$$

$1 \leq u \leq 2 \quad \ldots$